И. А. ГЕПКО, Е. В. ХАИРОВ

ОБ АДЕКВАТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ РЕЛЕЕВСКОГО РАДИОКАНАЛА В СИСТЕМАХ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Получена верхняя оценка ошибки для гладкой аппроксимации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) релеевского канала, определяющая энергетические потери в приемнике из-за неравномерности реальной АЧХ. Ошибка аппроксимации пропорциональна квадрату отношения ширины полосы частот системы к ширине полосы когерентности канала связи.

Радиосигналы, передаваемые в сотовых сетях мобильной связи, в общем случае претерпевают искажения как во временной, так и в частотной области. Временное рассеяние часто рассматривают как результат фильтрации сигнала в радиоканале [1]. Последний подвержен селективным замираниям во времени, если длительность передаваемых посылок превышает *интервал когерентности канала* T_C *— отрезок времени, на котором замирания остаются коррелироваными в пределах некоторого порогового значения корреляции* ρ. Так, при уровне $\rho \geq 0{,}5$ интервал $T_C \approx 9/16\pi f_D$, где f_D — максимальный доплеровский сдвиг частоты [1]. Например, в диапазоне 900 МГц при скорости движения абонента 90 км/ч время корреляции составляет около 2,4 мс. В современных системах сотовой радиосвязи данный эффект практически незаметен (длительность GMSK-сигнала в стандарте GSM составляет 3,693 мкс [1]).

Значительно более существенным оказывается обратный эффект — рассеивание энергии сигнала во временной области вследствие его селективных замираний по частоте. Таковые наблюдаются, когда ширина полосы частот системы велика по сравнению с шириной полосы когерентности канала W_C (область частот, в которой канал пропускает все компоненты спектра сигнала с приблизительно одинаковым коэффициентом усиления и линейным изменением фазы). Частотно-селективные замирания искажают спектр (а следовательно, и форму сигналов), что приводит к межсимвольной интерференции. Кроме того, если разнос прямого и обратного каналов по частоте превышает полосу когерентности (что характерно для всех систем сотовой связи), возникает асимметричность канала связи, усложняющая процедуру управления мощностью передатчиков мобильной и базовой станций.

Необходимым условием разработки и технической реализации методов борьбы с подобными искажениями [1] является точное математическое описание канала связи. Чаще всего прибегают к гладкой аппроксимации амплитудно-частотной характеристики канала [2; 3] (при этом предполагается, что ширина полосы частот системы связи не превосходит по ширине полосу когерентности канала). Возникает вопрос о степени погрешности такой аппроксимации и границах ее применимости. Его выяснению и посвящена данная статья.

Пусть аналитическое представление принимаемого сигнала в основной полосе рабочих частот системы шириной W для федингующего канала имеет вид [4]

$$r(t) = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l e^{-j\varphi_l} s(t-\tau_l)\,, \tag{1}$$

где $\varphi_l = 2\pi f_0 \tau_l + \theta_l$. В этом выражении θ_l характеризует фазовые искажения l-го луча сигнала из-за переотражений и дифракции, f_0 — несущую частоту, α — коэффициент ослабления его амплитуды, L — число значимых по энергетике разрешаемых лучей. Во временной области гладкая аппроксимация АЧХ канала предполагает пренебрежение рассеиванием сигнала во времени и основывается на допущении о том, что $s(t-\tau) \approx s(t)$. Принятый сигнал в этом случае можно представить в виде

$$\hat{r}(t) = s(t)\sum_{l=1}^{L} \alpha_l e^{-j\varphi_l}. \tag{2}$$

Тогда оцениваемая ошибка гладкой аппроксимации определяется как

$$\varepsilon(t) = \hat{r}(t) - r(t). \tag{3}$$

Максимальная задержка сигнала за счет многолучевости τ_{max} не всегда является объективным описанием среды распространения, поскольку различные каналы с одинаковым значением τ_{max} характеризуются разным профилем интенсивности во времени. Более информативен такой показатель, как среднеквадратичное отклонение времени задержки, иногда называемое также временем рассеяния [2]:

$$\sigma_\tau = \sqrt{\overline{\tau^2} - (\bar{\tau})^2}\,,$$

где $(\bar{\tau})^2$ — квадрат среднего значения τ; $\overline{\tau^2}$ — его второй момент. Таким образом, σ_τ — это квадратный корень второго центрального момента задержки сигнала.

К достаточно хорошей для практики модели принимаемого сигнала приводит допущение о равномерном распределении величины θ на интервале $\theta_l \in [0, 2\pi]$ [4]. В то же время для математического описания задержки распространения в различных источниках можно найти два разных варианта. Так, анализ экспериментальных данных показывает, что хорошей аппроксимацией для плотности распределения вероятностей $P(\tau)$ времени задержки распространения сигнала является экспоненциальное распределение [1]:

(4)

Кроме этого, в ряде работ используется упрощающее допущение о равномерности распределения вероятностей времени задержки распространения сигнала [4]

$$P(\tau) = 1/\tau_{\max}, \quad \tau \in [0, \tau_{\max}]. \tag{5}$$

Заметим, максимальная задержка $\tau_{\max}$ связана с σ_τ тем обстоятельством, что лучи распространения сигнала со степенью ослабления, превышающей $e^{-\tau_{\max} \backslash \sigma_\tau}$, не входят в сумму (1). Что же касается коэффициента α ослабления амплитуды сигнала в (2), то наиболее распространенной и используемой на практике является модель канала [4], где α распределен по закону Релея с условным по τ математическим ожиданием

$$<\alpha_l^2 \mid \tau_l> = a_l^2 = A \cdot \exp(-\tau_l / \sigma_\tau)\ . \tag{6}$$

Согласно (3) $\varepsilon(t) = \hat{r}(t) - r(t) = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l e^{-j\varphi_l} [s(t) - s(t-\tau_l)]$.

Запишем выражение для квадрата ошибки аппроксимации:

$$|\varepsilon(t)|^2 = \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{L} \alpha_i \alpha_k e^{-j2\pi f_0 \tau_i} e^{j2\pi f_0 \tau_k} e^{-j\theta_i} e^{j\theta_k} [s(t) - s(t-\tau_i)][s^*(t) - s^*(t-\tau_k)],$$

учитывая, что $< \exp(j\theta_i - j\theta_k) > = \delta_{i,k}$. Тогда математическое ожидание квадрата $|\varepsilon(t)|$:

$$<|\varepsilon(t)|^2> = \sum_{i=1}^{L} <\alpha_i^2 \, |s(t) - s(t-\tau_i)|^2>\ .$$

В предположении об относительно медленном изменении комплексной огибающей сигнала $s(t)$, прибегнув к его разложению в ряд Тейлора, получим:

$P(\tau$

$$s(t) - s(t-\tau_i) = s'(t) \cdot \tau_i + O(\tau_i^2).$$

Принимая во внимание, что в основной полосе частот сигнал $s(t)$ низкочастотный, оставим лишь медленно изменяющиеся составляющие, исключив из этого выражения слагаемые низших порядков. Таким образом, можно записать

$$s(t) - s(t-\tau_i) \approx s'(t) \cdot \tau_i,$$

что приводит к соотношению

$$<|\varepsilon(t)|^2> = |s'(t)|^2 \sum_{i=1}^{L} <\alpha_i^2 \tau_i^2>. \tag{7}$$

При экспоненциальном распределении задержек распространения сигнала (4) согласно (6) математическое ожидание правой части (7) имеет вид

$<\alpha_i^2 \tau_i^2> = << \alpha_i^2 \mid \tau_i > \cdot \tau_i^2> = < a_i^2 \tau_i^2> = A \cdot < e^{-\tau_i/\sigma_\tau} \cdot \tau_i^2>$, откуда согласно [5] получим:

$$< e^{-\tau/\sigma_\tau} \cdot \tau^2 > = \int_0^{\tau_{\max}} \left(\tau^2 e^{-\tau/\sigma_\tau}\right) \left(\frac{1}{\sigma_\tau} e^{-\tau/\sigma_\tau}\right) d\tau = \frac{1}{\sigma_\tau} \int_0^{\tau_{\max}} \tau^2 e^{-2\tau/\sigma_\tau} d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_\tau} \left[e^{-2\tau/\sigma_\tau} \left(\frac{\tau^2}{2/\sigma_\tau} + \frac{2\tau}{(2/\sigma_\tau)^2} + \frac{2}{(2/\sigma_\tau)^3} \right) \right] \Bigg|_0^{\tau_{\max}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_\tau} \left[\frac{2}{(2/\sigma_\tau)^3} - e^{-2\tau_{\max}/\sigma_\tau} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2/\sigma_\tau} + \frac{2\tau_{\max}}{(2/\sigma_\tau)^2} + \frac{2}{(2/\sigma_\tau)^3} \right) \right] \approx \frac{\sigma_\tau^2}{4}$$

(приближенное равенство будет справедливо с учетом $\tau_{\max}/\sigma_\tau >> 1$, что обычно имеет место на практике). Поэтому $<\alpha_i^2 \tau_i^2> \approx A\sigma_\tau^2/4$, а следовательно, (7) можно записать в виде

$$<|\varepsilon(t)|^2> \approx AL\frac{\sigma_\tau^2}{4} |s'(t)|^2\ .$$

Теперь, проинтегрировав обе части последнего выражения по времени на интервале существования сигнала с учетом всевозможной задержки распространения, найдем

$$\int_T <|\varepsilon(t)|^2> dt \approx AL\frac{\sigma_\tau^2}{4}\int_T |s'(t)|^2\, dt\,. \qquad (8)$$

При равномерном распределении τ (5) математическое ожидание правой части (7) приобретает вид $<\alpha_i^2\tau_i^2> = << \alpha_i^2 | \tau_i > \cdot \tau_i^2 > = < a_i^2\tau_i^2 > = A \cdot < e^{-\tau_i/\sigma_\tau} \cdot \tau_i^2 >$, откуда

$$< e^{-\tau/\sigma_\tau}\cdot\tau^2 > = \frac{1}{\tau_{\max}}\int_0^{\tau_{\max}} \tau^2\cdot e^{-\tau/\sigma_\tau}d\tau = -\frac{1}{\tau_{\max}}\left[e^{-\tau/\sigma_\tau}\left(\frac{\tau^2}{1/\sigma_\tau}+\frac{2\tau}{1/\sigma_\tau^2}+\frac{2}{1/\sigma_\tau^3}\right)\right]\Bigg|_0^{\tau_{\max}} =$$

$$= \frac{2\sigma_\tau^3}{\tau_{\max}} - e^{-\tau_{\max}/\sigma_\tau}\left(\tau_{\max}\cdot\sigma_\tau + 2\sigma_\tau^2 + \frac{2\sigma_\tau^3}{\tau_{\max}}\right) \approx \frac{2\sigma_\tau^3}{\tau_{\max}}.$$

Поэтому $<\alpha_i^2\tau_i^2> \approx A2\sigma_\tau^3/\tau_{\max}$ и, согласно (7), $<|\varepsilon(t)|^2> \approx A\dfrac{2L\sigma_\tau^3}{\tau_{\max}}|s'(t)|^2$.

Следовательно,

$$\int_T <|\varepsilon(t)|^2> dt \approx AL\frac{2\sigma_\tau^3}{\tau_{\max}}\int_T |s'(t)|^2\, dt. \qquad (9)$$

Аналогично при экспоненциальном законе распределения τ (4) математическое ожидание энергии принятого сигнала

$$<|r(t)|^2> = \sum_{i=1}^{L} < \alpha_i^2\, |s(t)|^2 > = |s(t)|^2 \sum_{i=1}^{L} < \alpha_i^2 > = AL\, |s(t)|^2 \cdot < e^{-\tau_i/\sigma_\tau} > =$$

$$= AL\,|s(t)|^2\cdot\frac{1}{\sigma_\tau}\int_0^{\tau_{\max}} e^{-2\tau/\sigma_\tau}d\tau = AL\,|s(t)|^2\cdot\frac{1}{\sigma_\tau}\left(-\frac{\sigma_\tau}{2}\cdot e^{-2\tau/\sigma_\tau}\right)\Bigg|_0^{\tau_{\max}} \approx \frac{1}{2}AL\,|s(t)|^2.$$

При интегрировании левой и правой частей этого выражения по времени получаем

$$\int_T <|r(t)|^2> dt \approx \frac{1}{2}AL\int_T |s(t)|^2\, dt\,. \qquad (10)$$

Точно так же при равномерной (5) плотности вероятности $P(\tau)$:

$$<|r(t)|^2> = AL\,|s(t)|^2\,\frac{1}{\tau_{\max}}\int_0^{\tau_{\max}} e^{-\tau/\sigma_\tau}d\tau = AL\,|s(t)|^2\,\frac{1}{\tau_{\max}}\left(\sigma_\tau e^{-\tau/\sigma_\tau}\right)\Big|_0^{\tau_{\max}} \approx \frac{AL\sigma_\tau}{\tau_{\max}}|s(t)|^2,$$

$$\int_T <|r(t)|^2> dt \approx AL\frac{\sigma_\tau}{\tau_{\max}}\int_T |s(t)|^2\, dt. \qquad (11)$$

Относительную (нормированную) энергию ошибки естественно определить в виде

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\int_T <|\varepsilon(t)|^2> dt}{\int_T <|r(t)|^2> dt}, \qquad (12)$$

откуда с учетом (8) и (10), (9) и (11)

$$\Delta_\varepsilon \approx \frac{\sigma_\tau^2}{2}\cdot\frac{\int_T |s'(t)|^2\, dt}{\int_T |s(t)|^2\, dt}$$ при экспоненциальном законе распределения τ (4),

$$\Delta_\varepsilon \approx 2\sigma_\tau^2\cdot\frac{\int_T |s'(t)|^2\, dt}{\int_T |s(t)|^2\, dt}$$ при равномерном законе распределения τ (5).

Если метод модуляции задан и аналитическое выражение для производной $s(t)$ удается получить в явном виде, то (12) может быть оценено непосредственно. Если же производная сигнала не известна, то целесообразно использовать соотношение

$$\int_T |s'(t)|^2\,dt = \int_{-W}^{W} |j2\pi f\cdot S(f)|^2 df \le 4\pi^2 W^2 \int_{-W}^{W} |S(f)|^2 df, \quad (13)$$

где $S(f)$ — преобразование Фурье от $s(t)$.

Ширина полосы когерентности W_C, длительность τ_{max} и время рассеяния σ_τ в первом приближении связаны между собой с точностью до постоянного множителя. Они зависят от характера многолучевости, имея разные значения для разного типа местности. При $\rho \ge 0{,}5$ весьма распространены следующие приближения [2]:

$$W_C \approx \tau_{max}^{-1} \text{ и } W_C = \frac{1}{5\sigma_\tau}. \quad (14)$$

Учитывая, что энергия сигнала, заданного во временной области, и его энергия в частотной области одинаковы, согласно (13) и (14) нетрудно получить оценки:

при экспоненциальном (4) *распределении вероятности времени задержки* τ

$$\Delta_\varepsilon \le 4\pi^2 W^2 \frac{\sigma_\tau^2}{2} \approx 0{,}08\pi^2 \left(\frac{W}{W_C}\right)^2, \quad (15)$$

а при равномерном распределении (5)

$$\Delta_\varepsilon \le 4\pi^2 W^2 \cdot 2\sigma_\tau^2 \approx 0{,}32\pi^2 \left(\frac{W}{W_C}\right)^2. \quad (16)$$

Таким образом, относительная ошибка гладкой аппроксимации амплитудно-частотной характеристики релеевского канала в полосе приема пропорциональна квадрату отношения ширины рабочей полосы частот системы и ширины полосы когерентности канала связи.

* * *

В условиях городской застройки варьирование величины времени рассеяния происходит в самых широких пределах, (от 0,1 до 10 мкс [1]) но для большей части территории типового города обычно принимают $\sigma_\tau = 1\ldots2$ мкс. Отсюда согласно (14) находим $W_C \approx 100\ldots200$ кГц. Таким образом, если ***для стандарта D-AMPS ($W = 30$ кГц) с дифференциальной квадратурной модуляцией $\pi/4$-DQPSK ошибка аппроксимации не превышает нескольких процентов, то для систем сотовой связи стандарта GSM ($W \ge W_C$) она достигает десятков (15) и даже сотен (16) процентов. (Впрочем, следует помнить, что для реального GMSK-сигнала стандарта GSM (сигнала с гауссовской частотной манипуляцией минимальным сдвигом) с постоянной огибающей и самым плавным из возможных законом изменения фазы [6] верхние границы ошибки (15), (16) с учетом малости $|s(t)|$ оказываются существенно завышенными.)***

Тем не менее согласно [7] относительная ошибка свыше ±5 дБ неприемлема даже при оценке медианного значения мощностей сигналов в условиях медленных замираний. Поэтому аппроксимация распределения задержек распространения t равномерным законом (5) может использоваться только при условии $W/W_C \ll 1$.

Литература

1. *Орлов В. К., Самойлов И. М., Смирнов В. Н. Системы мобильной связи /Под ред. В. П. Ипатова.— М.: Горячая линия — Телеком, 2003.— 272 с.*

2. *Sklar B. Rayleigh Fading Channel in Mobile Digital Communication Systems. Part I: Characterization // IEEE Communications Magazine.— 1997.— Vol. 35, No. 7.— P. 90–100.*

3. *Sklar B. Rayleigh Fading Channel in Mobile Digital Communication Systems. Part II: Mitigation // IEEE Communications Magazine.— 1997.— Vol. 35, No. 7.— P. 102–109.*

4. *Kim S. W., Stark W. Performance Limits of Reed-Solomon Coded CDMA with Orthogonal Signaling in a Rayleigh-Fading Channel // IEEE Trans. on Commun.— Sept. 1998.— P. 1125–1134.*

5. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.— М.: Наука, 1986.— С. 107.*

6. *Громаков Ю. А. Стандарты и системы подвижной радиосвязи.— М.: Эко-Трендз, 1998.*

7. *Garg V. K., Smolik K., Wilkes J. E. Applications of Code-Division Multiple Access (CDMA) in Wireless // Personal Communications, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.— 360 с.*